
Aufgabe *(Legendre-Hadamard Bedingung)* (8 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet. Wir betrachten das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f\big(x, u(x), Du(x)\big)\,dx \qquad \text{mit } f = f(x,z,p) \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}).$$

Sei $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ein kritischer Punkt, genauer

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u+t\phi)|_{t=0} = 0 \qquad \text{für alle } \phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Die Funktion u heißt *stabiler* kritischer Punkt, falls zusätzlich

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}(u+t\phi)|_{t=0} \geq 0 \qquad \text{für alle } \phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Zeigen Sie, dass ein stabiler kritischer Punkt die notwendige Bedingung von Legendre-Hadamard erfüllt: für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$(D_p^2 f)(x,u,Du)(\xi \otimes \eta, \xi \otimes \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial p^i_\alpha p^j_\beta}(x,u,Du)\xi_\alpha \xi_\beta \eta^i \eta^j \geq 0.$$

Anleitung. Gehen Sie wie folgt vor:

(1) Wählen Sie $\phi(x) = \varrho\varphi(\frac{x-x_0}{\varrho})$ für $\varphi \in C^1_c(B_1(0), \mathbb{R}^m)$, und folgern Sie mit $\varrho \searrow 0$

$$A^{\alpha\beta}_{ij}(x_0)\int_{B_1(0)} \partial_\alpha\varphi^i \partial_\beta\varphi^j \geq 0 \qquad \text{wobei } A^{\alpha\beta}_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^i_\alpha p^j_\beta}(\cdot, u, Du).$$

(2) Wählen Sie weiter $\varphi(x) = \zeta(x)\eta$ mit $\eta \in \mathbb{R}^m$ und $\zeta \in C^1_c(B_1(0))$. Dies ergibt

$$A^{\alpha\beta}_{ij}(x_0)\eta^i\eta^j \int_{B_1(0)} \partial_\alpha\zeta\partial_\beta\zeta \geq 0.$$

(3) Jetzt wählen Sie $\zeta(x) = \gamma(x)\,g(t\langle\xi, x\rangle)$ mit $\gamma \in C^1_c(B_1(0))$, und $g(t) = \cos t$ sowie $g(t) = \sin t$. Mit $t \nearrow \infty$ folgt die Behauptung.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 30. Januar vor der Vorlesung.